Two-stage estimation procedure for the location parameter of an exponential distribution when a lower bound of the scale parameter is known (Statistical Experiment and Its Related Topics)

磯貝, 英一; 小林, 加奈

数理解析研究所講究録
第 1703 巻 2010 年 195-201

Two-stage estimation procedure for the location parameter of an exponential distribution when a lower bound of the scale parameter is known

新潟大学・自然科学　磯貝　英一 (Eiichi Isogai)
Graduate School of Science and Technology,
Niigata University

新潟大学・自然科学　小林　加奈 (Kana Kobayashi)
Graduate School of Science and Technology,
Niigata University

1. はじめに

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ は独立で次の同一の指数分布 $E_{XP}(\mu, \sigma)$ に従う確率変数列とする.

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \sigma^{-1} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) I(x > \mu). \tag{1.1}$$

ただし, $I(\cdot)$ は定義関数で, 位置母数 $\mu \in (-\infty, \infty)$ と尺度母数 $\sigma \in (0, \infty)$ はともに未知である. 任意に与えられた $d(>0)$ と $0 < \alpha < 1$ に対して, 無作為標本 $X_1, X_2, \ldots X_n$ に基づいて区間幅が d, 信頼係数が $1-\alpha$ の信頼区間 I_n を構成したい. すなわち, すべての μ, σ, d, α に対して $P\{\mu \in I_n\} \geq 1-\alpha$ を満たす信頼区間 I_n を構成したい.

$$X_{n(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad U_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{n(1)}) \quad \text{for} \ \ n \geq 2 \tag{1.2}$$

とおくとき, 区間幅が d である μ の信頼区間を $I_n = [\,X_{n(1)} - d,\, X_{n(1)}\,]$ で与える.
$n(X_{n(1)} - \mu)/\sigma$ は (1.1) の分布 $f_{0,1}$ に従うので,

$$P\{\mu \in I_n\} = P\left\{n(X_{n(1)} - \mu)/\sigma \leq (dn/\sigma)\right\} = F(dn/\sigma)$$

が成り立つ. ただし, $F(x) = 1 - e^{-x}$ は $f_{0,1}$ の分布関数である. 従って,

$$n \geq a\sigma/d \equiv C \quad \text{with} \ \ a = \log \alpha^{-1} \tag{1.3}$$

を満たす標本の大きさ n に対して,

$$P\{\mu \in I_n\} \geq 1-\alpha \quad \text{for all fixed } \mu, \sigma, d \ \text{ and } \ \alpha$$

が成り立つ. ここで, C を最適標本数とよぶ. C には未知な尺度母数 σ が含まれるので C を用いることができない.

Mukhopadhyay and Hilton [8] は 位置母数 μ に関する最小リスクおよび有界リスク点推定問題に対して修正二段階法と純逐次法を考えた. Chaturvedi and Shukla [1] はこの問題に対して純逐次法を提案した. Mukhopadhyay and Mauromoustakos [9] は三段階法を考えた. Mukhopadhyay and Zacks [10] は μ と σ の 1 次関数の有界リスク点推定問題を考え, 修正二段階法を提案した. Mukhopadhyay [3],[4] はこれらの問題についてまとめている.

一般に，修正二段階法は Ghosh and Mukhopadhyay [2] の意味で 1 次の漸近有効性をもつが，2 次の漸近有効性をもたない．そこで，Mukhopadhyay and Duggan [6] は正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の母平均 μ の固定幅信頼区間問題に対して，$\sigma > \sigma_L$（$\sigma_L > 0$ は既知の定数）の仮定の下で修正二段階法が 2 次の漸近有効性をもつことを示した．さらに，被覆確率の 2 次の漸近展開を与えた．同じ問題に対して，Mukhopadhyay [5] は平均標本数および被覆確率の高次の漸近展開を求めた．

指数分布 $E_{XP}(\mu,\sigma)$ において，σ の下界 $(0 <)\sigma_L < \sigma$ が分かっていると仮定する．Mukhopadhyay and Duggan [7] は推定や決定理論の分野において，より一般的な最適標本数を考えて修正二段階法を定義し，平均標本数および被覆確率の上界の漸近展開を求め，正規分布や指数分布などへの応用を扱った．本論文では指数分布 $E_{XP}(\mu,\sigma)$ の位置母数 μ の固定幅信頼区間問題に対して，Mukhopadhyay and Duggan [7] の修正二段階法を考え，平均標本数および被覆確率の高次の漸近展開を与えることである．

2. 修正二段階法

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ は (1.1) の確率密度関数をもつ，独立な確率変数列とする．ここで，$\sigma > \sigma_L$ を満たす下界 $\sigma_L(>0)$ は既知であると仮定する。Mukhopadhyay and Duggan [7] は次の修正二段階法を定義した．

第 1 段階

$$m = m(d) = \max\left\{m_0,\ \left[\frac{a\sigma_L}{d}\right]^* + 1\right\}. \tag{2.1}$$

ただし，$m_0\,(\geq 2)$ は前もって与えた整数，$[x]^*$ は x より小さい最大整数である．

第 2 段階

無作為標本 $X_1, \ldots, X_m$ を用いて (1.2) の U_m を計算し，

$$N = N(d) = \max\left\{m,\ \left[\frac{b_m U_m}{d}\right]^* + 1\right\} \tag{2.2}$$

を求める．ただし，b_m は自由度 $2, 2(m-1)$ の F-分布 $F_{2,2(m-1)}$ の上側 $100\alpha\,\%$ 点である．このとき，大きさ N の無作為標本 $X_1, X_2, \ldots X_N$ に基づいて μ の信頼区間を

$$I_N = [\, X_{N(1)} - d,\ X_{N(1)}\,]$$

で与える．(2.1)，(2.2) から次の基本不等式が導かれる．

$$\begin{aligned} &\frac{b_m U_m}{d} \leq N \leq mI(N=m) + \frac{b_m U_m}{d} + 1, \\ &\frac{b_m U_m}{a\sigma} \leq \frac{N}{C} \leq \frac{md}{a\sigma} I(N=m) + \frac{b_m U_m}{a\sigma} + C^{-1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

次の補題は第 1 段階で標本抽出が停止する確率に関する結果である．

補題 2.1. 任意の整数 $k \geq 0$ に対して

$$P(N = m + k) = O(h^{m-1}) \quad \text{as} \quad d \to 0$$

が成り立つ．ただし，$h=(\sigma_L/\sigma)\exp\{1-(\sigma_L/\sigma)\}\in(0,1)$ である．

さて，(2.1)，(2.2) で定義された修正二段階法について 1 次の漸近有効性および一致性をもつ定理が次で与えられる．証明は補題 2.1 を用いる．

定理 2.1.
(1) $N/C \xrightarrow{a.s.} 1$ as $d\to 0$
(2) $E(N/C)\to 1$ as $d\to 0$　（1 次の漸近有効性）
(3) $P\{\mu\in I_N\}\geq 1-\alpha$ for all fixed μ,σ,d and α　（一致性）

3. 高次漸近展開

$E(N-C)$ および被覆確率 $P\{\mu\in I_N\}$ の下界および上界の漸近展開を与える．この定理から (2.1)，(2.2) の修正二段階法は Ghosh and Mukhopadhyay [2] の意味での 2 次の漸近有効性をもつことがわかる．次の定理は $E(N-C)$ の 3 次の漸近展開を与える．

定理 3.1. （3 次の漸近有効性）

$$\eta_0+\eta_1C^{-1}+o(C^{-1})\leq E(N-C)\leq(\eta_0+1)+\eta_1C^{-1}+o(C^{-1})\quad\text{as}\quad d\to 0\,.$$

ただし，

$$\eta_0=\frac{a}{2!}\left(\frac{\sigma}{\sigma_L}\right),\quad \eta_1=\frac{a^2}{3!}\left(\frac{\sigma}{\sigma_L}\right)^2$$

従って，修正二段階法は Ghosh and Mukhopadhyay [2] の意味で 3 次の漸近有効性をもつ．

注意 3.1. Mukhopadhyay and Duggan [7] は次の漸近展開を与えた．

$$\eta_0+o(C^{-1/2})\leq E(N-C)\leq(\eta_0+1)+o(C^{-1/2})\quad\text{as}\quad d\to 0\,.$$

このことから，修正二段階法は Ghosh and Mukhopadhyay [2] の意味で 2 次の漸近有効性をもつ．

次の定理は $N-C$ の漸近正規性を与えている．

定理 3.2. （漸近正規性）

$$C^{-1/2}(N-C)\ \xrightarrow{\mathcal{D}}\ N(0,\sigma/\sigma_L)\quad\text{as}\quad d\to 0\,.$$

被覆確率 $P\{\mu\in I_N\}$ の上界の高次漸近展開は次の定理で与えられる．

定理 3.3. （高次漸近展開）
十分小さい d に対して

$$1-\alpha\leq P\{\mu\in I_N\}\leq 1-\alpha+A_{0U}C^{-1}+A_{1U}C^{-3/2}+A_{2U}C^{-2}+o(C^{-2})\tag{3.1}$$

が成り立つ．ただし，a は (1.3) で与えられ，

$$A_{iU} = \frac{\alpha a}{i!}\left(a^2\frac{\sigma}{\sigma_L}\right)^{i/2} \qquad (i = 0, 1, 2)$$

注意 **3.2.** Mukhopadhyay and Duggan [7] は次の２次の漸近展開を与えた．

$$1 - \alpha + o(C^{-1}) \leq P\{\mu \in I_N\} \leq 1 - \alpha + A_{0U}C^{-1} + o(C^{-1}) \quad \text{as} \quad d \to 0\,.$$

4. シミュレーション結果

$\mu = 0$, $\sigma = 1$, $m_0 = 10$ として１０万回の繰り返しを行ってその平均を取り，$E(N)$ を $\overline{n}$ で，$E(N-C)$ を $\overline{n} - C$ で近似した．ただし，オーダー $o(\cdot)$ の項は無視した．L_1, U_1 と L_2, U_2 はそれぞれ定理 3.1 と定理 3.3 の下界と上界を表す．すなわち，

$$L_1 = \eta_0 + \eta_1 C^{-1}, \quad U_1 = (\eta_0 + 1) + \eta_1 C^{-1},$$
$$L_2 = 1 - \alpha, \quad U_2 = 1 - \alpha + A_{0U}C^{-1} + A_{1U}C^{-3/2} + A_{2U}C^{-2}\,.$$

Table. $Exp(0,1)$, $1-\alpha = 0.95$, $\sigma_L = 0.5$ (上段), $\sigma_L = 0.8$ (下段)

C	d	$\overline{n}$	$\overline{n} - C$	L_1	U_1	$\overline{p}$	L_2	U_2
30	0.076753	33.708	3.708	3.195	4.195	0.95142		0.960348
		32.750	2.750	1.950	2.950	0.95483		0.958979
50	0.046052	53.609	3.608	3.115	4.115	0.95179		0.955328
		52.597	2.596	1.919	2.919	0.95244		0.954751
100	0.023026	103.584	3.583	3.056	4.056	0.95101		0.952267
		102.517	2.516	1.896	2.896	0.95089	0.9500	0.952084
200	0.011513	203.533	3.538	3.026	4.026	0.95071		0.951007
		202.316	2.320	1.884	2.884	0.95088		0.950947
400	0.005757	403.530	3.523	3.011	4.011	0.95021		0.950462
		402.394	2.387	1.878	2.878	0.95023		0.950442
800	0.002878	803.479	3.486	3.003	4.003	0.95021		0.950217
		802.292	2.300	1.875	2.875	0.95020		0.950211

このシミュレーションでは $\sigma_L = 0.8$ の方が $\sigma_L = 0.5$ より真の $\sigma = 1$ に近いので，平均標本数 $\overline{n}$ が少なく，かつ U_2 の値が小さい (被覆確率のより良い近似) という意味で，$\sigma_L = 0.8$ の場合の修正二段階法が $\sigma_L = 0.5$ に比べてより良いことがわかる．

5. 定理 3.1 と定理 3.3 の証明

次の結果は F-分布 $F_{2,2(m-1)}$ の上側 $100\alpha\,\%$ 点 b_m の a への収束の速さに関する結果である.

$$b_m = a + \frac{a^2}{2(m-1)} + \frac{a^3}{6(m-1)^2} + o(m^{-2}) \quad \text{as} \quad m \to \infty\,. \tag{5.1}$$

次の記号を用いる.

$$T = b_m U_m/d,\ S = [T]^* + 1 - T,\ Y_m = 2(m-1)U_m/\sigma,\ l_m = b_m/a$$
$$\text{and} \quad r_m = \frac{a}{2(m-1)} + \frac{a^2}{6(m-1)^2} + o(m^{-2}).$$

(2.3), (5.1), $Y_m \sim \chi^2_{2(m-1)}$ を用いると，次の結果が得られる.

$$\begin{aligned}
&(N-C)I(N>m) = \{(T-C)+S\}I(N>m),\ 0 \le S \le 1,\\
&T = C\,l_m \frac{Y_m}{2(m-1)}, \quad l_m = 1 + r_m\,,\\
&C^{-k}E(T^k) = l_m^k \frac{(m-1)(m-1+1)\cdots(m-1+k-1)}{(m-1)^k} \quad \text{and}\\
&l_m^k = 1 + \frac{ka}{2(m-1)} + \frac{k(3k+1)a^2}{24(m-1)^2} + o(d^2) \quad \text{for } k = 1, 2, \cdots\,.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

(2.1) から，ある $0 < d_0 < a\sigma_L/m_0$ が存在して， すべての $0 < d < d_0$ に対して

$$\begin{aligned}
&a\sigma_L/d \le m \le (a\sigma_L/d) + 1,\ d/(a\sigma_L) \le (m-1)^{-1} \le d/(a\sigma_L) + d^2/(a\sigma_L)^2 + o(d^2),\\
&(m-1)^{-2} = d^2/(a\sigma_L)^2 + o(d^2)\,.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

が成り立つ.

(5.2), (5.3) を用いると，以下の補題が証明できる．ただし，$0 < d < d_0$ は十分小さいとする.

補題 5.1.

$$\frac{1}{2\sigma_L}d + \frac{1}{6\sigma_L^2}d^2 + o(d^2) \le C^{-1}E(N-C) \le \left(\frac{1}{2\sigma_L} + \frac{1}{a\sigma}\right)d + \frac{1}{6\sigma_L^2}d^2 + o(d^2)\,.$$

補題 5.2.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a\sigma_L}\,d - \frac{2}{a\sigma\sqrt{a\sigma_L}}\,d^{3/2} + \frac{a^2+4a}{4a^2\sigma_L^2}\,d^2 + o(d^2)\\
&\le C^{-2}E(N-C)^2\\
&\le \frac{1}{a\sigma_L}\,d + \frac{2}{a\sigma\sqrt{a\sigma_L}}\,d^{3/2} + \left(\frac{(a+2)^2}{4a^2\sigma_L^2} + \frac{1}{a^2\sigma^2}\right)d^2 + o(d^2)\,.
\end{aligned}$$

補題 5.3.

$$\frac{3a+4}{2a^2\sigma_L^2}d^2 + o(d^2) \le C^{-3}E(N-C)^3 \le \left(\frac{3a+4}{2a^2\sigma_L^2} + \frac{3}{a^2\sigma\sigma_L}\right)d^2 + o(d^2)\,.$$

補題 5.4.

$$C^{-4}E(N-C)^4 = \frac{3}{a^2\sigma_L^2}d^2 + o(d^2) \quad \text{and} \quad C^{-5}E[e^{-aW}(N-C)^5] = o(d^2).$$

ただし，W は (5.4) で与えられる確率変数である。

定理 3.1 の証明

補題 5.1 からすぐに導ける．

定理 3.3 の証明

(3.1) の左辺は定理 2.1 (3) から成り立つ．(3.1) の右辺を示す．$g(x) = e^{-ax}$ for $x \geq 0$ とおくと，

$$P\{\mu \in I_N\} = 1 - E[g(N/C)]$$

が成り立つ．$g(N/C)$ を 1 の周りでテイラー展開すると

$$\begin{aligned} &P\{\mu \in I_N\} \\ &= 1 - \alpha + \alpha a C^{-1}E(N-C) - \frac{\alpha a^2}{2}C^{-2}E(N-C)^2 + \frac{\alpha a^3}{6}C^{-3}E(N-C)^3 \\ &\quad - \frac{\alpha a^4}{24}C^{-4}E(N-C)^4 + \frac{a^5}{5!}C^{-5}E[e^{-aW}(N-C)^5] \end{aligned} \tag{5.4}$$

ただし，W は $|W-1| < |N/C-1|$ を満たす確率変数である．(1.3)，(5.4) と補題 5.1 から補題 5.4 を用いると，

$$\begin{aligned} P\{\mu \in I_N\} &\leq 1 - \alpha + \alpha a \left\{ \left(\frac{1}{2\sigma_L} + \frac{1}{a\sigma} \right) d + \frac{1}{6\sigma_L^2}d^2 \right\} \\ &\quad - \frac{\alpha a^2}{2}\left(\frac{1}{a\sigma_L}d - \frac{2}{a\sigma\sqrt{a\sigma_L}}d^{3/2} + \frac{a^2+4a}{4a^2\sigma_L^2}d^2 \right) \\ &\quad + \frac{\alpha a^3}{6}\left(\frac{3a+4}{2a^2\sigma_L^2} + \frac{3}{a^2\sigma\sigma_L} \right) d^2 - \frac{\alpha a^4}{24}\left(\frac{3}{a^2\sigma_L^2}d^2 \right) + o(d^2) \\ &= 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\sigma}d + \frac{\alpha\sqrt{a}}{\sigma\sqrt{\sigma_L}}d^{3/2} + \frac{\alpha a}{2\sigma\sigma_L}d^2 + o(d^2) \\ &= 1 - \alpha + A_{0U}C^{-1} + A_{1U}C^{-3/2} + A_{2U}C^{-2} + o(C^{-2}). \end{aligned}$$

これで (3.1) の右辺が証明された．

参考文献

[1] Chaturvedi, A. and Shukla, P.S. (1990). Sequential point estimation of location parameter of a negative exponential distribution, J. Indian Statist. Assoc., 28, 41–50.

[2] Ghosh, M. and Mukhopadhyay, N. (1981). Consistency and asymptotic efficiency of two-stage and sequential estimation procedures, Sankyā, A, 43, 220–227.

[3] Mukhopadhyay, N. (1988). Sequential estimation problems for negative exponential populations, Commun. Statist. - Theory and Methods (Reviews Section), 17, 2471–2506.

[4] Mukhopadhyay, N. (1995). Two-stage and multi-stage estimation. In: N. Balakrishnan and A.P. Basu (Eds.), The Exponential Distribution: Theory, Methods and Applications. Gordon and Breach Publishers, Amsterdam, pp. 429–452 (Chapter 26).

[5] Mukhopadhyay, N. (1999). Higher than second-order approximations via two-stage sampling. *Sankhyā Ser.A* **61**, 254–269.

[6] Mukhopadhyay, N. and Duggan, W.T. (1997). Can a two-stage procedure enjoy second-order properties?, Sankyā, A, 59, 435–448.

[7] Mukhopadhyay, N. and Duggan, W. (1999). On a two-stage procedure having second-order properties with applications. *Ann. Inst. Statist. Math.* **51**, 621–636.

[8] Mukhopadhyay, N. and Hilton, G.F. (1986). Two-stage and sequential procedures for estimating the location parameter of a negative exponential distribution, South African Statist. J., 20, 117-136.

[9] Mukhopadhyay, N. and Mauromoustakos, A. (1987). Three-stage estimation procedure for the negative exponential distribution, Metrika, 34, 83–93.

[10] Mukhopadhyay, N. and Zacks, S. (2007). Bounded risk estimation of linear combinations of the location and scale parameters in exponential distributions under two-stage sampling, J. Statist. Plann. Inference 137, 3672–3686.